(56) 21/11

Ορισμός

$f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$, f ομοιομορφισμός $\Leftrightarrow$ f, f^{-1} συνεχείς συναρτήσεις

αμφ..

Πρόταση

$f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ τότε:

1-1 f ομοιομορφισμός $\Leftrightarrow (\forall A \subseteq E_1): A$ ανοιχτό $\Leftrightarrow f(A)$ ανοιχτό εν E_2

f ομοιομορφισμός $\Leftrightarrow (\forall K \subseteq E_1): K$ κλειστό $\Leftrightarrow f(K)$ κλειστό εν E_2

Ορισμός

$f: E_1 \to E_2$, τότε f ισομετρία $\Leftrightarrow (\forall x, y$ εν $E_1) : \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$

Πρόταση

Έστω $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$, ισομετρία. Τότε

i) f είναι "1-1"

ii) f ομ. συνεχής

iii) f^{-1} ισομετρία

v) f ομοιομορφισμός

Απόδειξη

i) $f(x)=f(y)$. Τότε $0=\rho_2(f(x),f(y)) \overset{\text{ισομ.}}{=} \rho_1(x,y) \Rightarrow x=y$ (f όχι και απαραίτητα επί)

ii) Προφανές! $(\rho_2(f(x),f(y)) \leq 1 \cdot \rho(x,y))$

iii) f επί $\xrightarrow{f\ 1\text{-}1}$ Η f^{-1} είναι συνάρτηση $f^{-1}: E_2 \xrightarrow{\text{επί}} E_1$

Ας είναι z,w τυχόντα στοιχεία εν E_2. Τότε υπάρχουν x,y εν E_1:

$f(x)=z$, $f(y)=w \Rightarrow f^{-1}(z)=x$, $f^{-1}(w)=y$

f ισομετρία $\Rightarrow \rho_2(f(x),f(y)) = \rho_1(x,y) \Rightarrow \rho_2(z,w)=\rho_1(f^{-1}(z),f^{-1}(w)) \Rightarrow$

f^{-1} ισομετρία

iv) f ομ. συνεχής $\Rightarrow f$ συνεχής

f^{-1} ισομετρία $\xrightarrow{\text{iii)}} f^{-1}$ ομ. συνεχής $\Rightarrow f^{-1}$ συνεχής

§5ο Κεφάλαιο

(E,ρ) πλήρης μ.χ. $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ Τυχούσα βασική ακολουθία του E είναι συγκλίνουσα εν E

Ορισμός

$S \subseteq E$, S πλήρες $\Leftrightarrow$ ο μετρικός υπόχωρος S είναι πλήρης

Πρόταση 1

Έστω (E,ρ) πλήρης μ.χ. κ $S \neq \emptyset$, S κλειστό υποσύνολο του E.

Τότε το S είναι πλήρες

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Θεωρώ $x \in \mathbb{R}$ κ $\varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Τότε $(\exists q \in \mathbb{Q})\ x-\varepsilon < q < x+\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}): q \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}): q \in \mathbb{Q} \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}}$ Άρα $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ το αντίστροφο ισχύει πάντα άρα

$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$.

Επίσης το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό

Απόδ. προτ. 1

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική στον μετρ. υποχώρο $S \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική κ στον μ.χ $E \xrightarrow{E\ \text{πλήρης}} \exists \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = a \in E$

$\xrightarrow{S\ \text{κλειστό}} a = \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu \in S$ Άρα S πλήρες

Πρόταση 2

Έστω S πλήρες υποσύνολο ενός μ.χ. E. Τότε το S είναι κλειστό

Απόδ. προτ. 2

Αρκεί ν.δ.ο. τυχούσα ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν S που είναι συγκλίνουσα ικανοποιεί την σχέση $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu \in S$.

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν S, με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = a \in E$.

Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ως συγκλίνουσα είναι κ βασική εν E. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική εν $S \xrightarrow{S\ \text{πλήρης μετρ. υποχώρος}} \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = a \in S$.

Άρα το S κλειστό

$(E_1, \rho_1), \dots, (E_k, \rho_k)$ μ.χ. , $E = E_1 \times \dots \times E_k$

$E \ni x = (x_1, \dots, x_k)$ με $\rho(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \dots + \rho_k^2(x_k,y_k)}$

$E \ni y = (y_1, \dots, y_k)$ (E, ρ) καρτεσ. μ.χ. των μ.χ. (E_i, ρ_i), $i = 1,2,3,\dots$

Πρόταση 3

(E,ρ) πλήρης $\Longleftrightarrow (\forall i = 1, \dots, k) : (E_i, \rho_i)$ πλήρης

Απόδειξη πρότ. 3 ($\Longrightarrow$)

Έστω (E,ρ) πλήρης κ έστω $1 \le \lambda \le k$. Θ.δ.ο. $(E_\lambda, \rho_\lambda)$ πλήρης.

Έστω $(a_\nu^\lambda)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία βασική εν $(E_\lambda, \rho_\lambda)$

$l_1 \in E_1, \dots, l_{\lambda-1} \in E_{\lambda-1}, l_{\lambda+1} \in E_{\lambda+1}, \dots, l_k \in E_k$

$a_\nu = (l_1, \dots, l_{\lambda-1}, a_\nu^\lambda, l_{\lambda+1}, \dots, l_k)$, $\nu \in \mathbb{N}$

$\rho(a_\nu, a_\mu) = \sqrt{\rho_1^2(l_1,l_1)^{0} + \dots + \rho_\lambda^2(a_\nu^\lambda, a_\mu^\lambda) + \dots + \rho_k^2(l_k,l_k)^{0}} = \rho_\lambda(a_\nu^\lambda, a_\mu^\lambda)$

$\xrightarrow{(a_\nu^\lambda)_{\nu\in\mathbb{N}}\ \text{βασική}} (a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική $\xrightarrow{E\ \text{πλήρης}} \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l = (l_1, \dots, l_\lambda, \dots, l_k)$

όπου $l_\lambda = \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu^\lambda \in E_\lambda$

Απόδειξη προτ. 3 (⟸)

Έστω $(E_1,\rho_1),\dots,(E_k,\rho_k)$ πλήρεις μ.χ. Θ.δ.ο. (E,ρ) πλήρης

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική ακολουθία εν E. Τότε $a_\nu=(a_{1\nu},\dots,a_{k\nu})$ βασική

$\overset{(*)}{\Rightarrow} (\forall i=1,\dots,k): (a_{i\nu})_{\nu\in N}$ βασική $\xrightarrow{(\forall i=1,\dots,k):(E_i,\rho_i)\ \text{πλήρεις}}$

$(\forall i=1,\dots,k): \lim_{\nu\in N} a_{i\nu} = l_i \in E_i \Rightarrow E \ni l=(l_1,\dots,l_k)=\lim_{\nu\in N} a_\nu$

Με εκκρεμότητα την (*):

Άσκηση (*) → ($p_i: E\to E_i$, p_i η i-προβολή $a_\nu \xrightarrow{p_i} a_{i\nu}$

Η ομοιόμορφη συνέχεια διατηρεί τη βασικότητα

Η'

Μέσω μιας ευθείας απόδειξης (*)

Έστω $a_\nu=(a^1_\nu,\dots,a^i_\nu,\dots,a^k_\nu)_{\nu\in N}$

$(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική εν $E \Rightarrow (a^i_\nu)_{\nu\in N}$ βασική εν E_i με $i=1,2,\dots,k$

$\rho_i(a^i_\nu,a^i_\mu)=\sqrt{\rho_i^2(a^i_\nu,a^i_\mu)} \le \sqrt{\rho_1^2(a^1_\nu,a^1_\mu)+\dots+\rho_i^2(a^i_\nu,a^i_\mu)+\dots+\rho_k^2(a^k_\nu,a^k_\mu)}=\rho(a_\nu,a_\mu)$

άρα $\rho_i(a^i_\nu,a^i_\mu)\le\rho(a_\nu,a_\mu)$

Άρα $\rho_i(a^i_\nu,a^i_\mu) \in \rho(a_\nu,a_\mu)$ άρα $(a^i_\nu)_{\nu\in N}$ βασική με $i=1,2,\dots,k$

Ισχύει το αντίστροφο?

$\rho(a_\mu,a_\nu)\le\rho_1(a^1_\nu,a^1_\mu)+\dots+\rho_k(a^k_\nu,a^k_\mu)<\underbrace{\frac{\varepsilon}{k}+\dots+\frac{\varepsilon}{k}}_{k\ \text{φορές}}=k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$